TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED
PROCEEDINGS OF TALLINN TECHNICHAL UNIVERSITY
ОЧЕРКИ ПО ОБРОБОТКЕ ИНФОРМАЦИИ И
ФУНКЦИОНАЛЬНОМУ АНАЛИЗУ
SERIA A No. 313 1971
pp. 37 – 44 UDC 51:65.012.122

О Принципе Максимума для некоторых Функций Множеств

Резюме. В статье рассматривается задача нахождения экстремальных точек функции, заданной на всех подмножествах конечного множества. Метод построения функции (1) приводит к выделению экстремальных множеств. Основная особенность метода построения основана на предположении, что для каждого элемента α существует набор чисел $\left\{\pi_H(\alpha)\right\}$, где H – подмножество конечного множества и $\alpha \in H$.

1. Введение

В нашем исследовании мы рассматриваем задачу нахождения глобального экстремума функции, заданной на всех подмножествах данного конечного множества. Описанный алгоритм построения применялся для решения некоторых задач классификации объектов с помощью метода однородных цепей Маркова. В общем виде предлагаемая конструкция позволяет решать некоторые задачи на графах, например, выделять в некотором смысле «связные» подмножества вершин графа. Теоретическая основа конструкции формулируется в терминах специальных правил отбора последовательностей подмножеств данного конечного множества и некоторых последовательностей его элементов, результатом которых является извлечение экстремальных подмножеств.

Задачи подобного типа имеют или носят комбинаторный характер и относятся скорее всего к задачам дискретного программирования. Определенный класс подобных задач на конечных множествах успешно решается в работах Черенина (1962), Черенина и Хачатурова (1965). В рамках этих работ рассматривались функции, удовлетворяющие условию, которое можно сформулировать следующим образом. Если ω_1 и ω_2 являются двумя представителями подмножеств данного конечного множества, то

$$f(\omega_1) + f(\omega_2) \le f(\omega_1 \cup \omega_2) + f(\omega_1 \cap \omega_2).$$

Это условие в некоторой степени отражает выпуклость функции f.

Главным свойством или требованием предъявляемым к рассматриваемому в рукописи класса функций является предположение о существовании некоторых чисел или весов (credentials, ed.), выявляющих для каждого элемента конечного множества степень его вхождения в подмножество. Степень вхождения должна удовлетворять условиям пп.1-2 (см. ниже).

Относительно настоящего исследования стоит также обратить внимание на работу Миркина (1970). В данной работе задача оптимальной классификации сводится к поиску специальной «раскраски» на неупорядоченном графе. Оптимальная классификация там характеризуется некоторым максимальным значением функции, соответствующим по своему виду определению (1), однако при этом мы интерпретируем (1) в ином смысле. Мы не рассматриваем в нашем определении функции разбиение заданного множества на два непересекающихся подмножества, что было основной задачей Миркина (cf., Võhandu & Frey, 1966, ed.).

2. Принцип максимума

Пусть $\{H\}$ множество подмножеств некоторого конечного множества W. Предположим, что мы вводим функцию π_H для каждого из элементов $H \subseteq W$ на совокупности подмножеств $\{H\}$ в качестве аргументов. Ниже под набором $\{\pi_H\}$ мы подразумеваем систему весов на множестве подмножеств $\{\{\pi_H\}\}$. Основное предположение относительно весовых систем следующее:

п.1 Весом $\pi_H(\alpha)$ элемента $\alpha \in H$ является действительное число;

п.2 Между различными системами весов $\{\{\pi_H\}\}$ для разных подмножеств $\{H\}$ набора $\{\pi_H\}$, существуют следующие зависимости: для каждого элемента $\alpha \in H$ и каждого $\beta \in H \setminus \{\alpha\}$ справедливо: $\pi_{H\setminus\alpha}(\beta) \leq \pi_H(\alpha)$.

Другими словами, согласно пункту 2, требование состоит в том, чтобы удаление произвольного элемента α из множества H приводило бы к новой системе весов $\{\pi_{H\setminus\alpha}\}$, а влияние удаленного элемента α на веса в оставшейся части $H \setminus \{\alpha\}$ было бы только в направлении уменьшения. Поясним эти два условия на примерах из теории графов, хотя есть и примеры из других областей познания, однако менее удобные для краткого обсуждения. Рассмотрим неориентированные графы, т.е. графы со свойством, когда отношение вершины x к y влечет обратное отношение вершины y к x.

Пример 1.

Пусть W – множество вершин графа G. Мы определяем систему весов $\{\pi_H\}$ на каждом подмножестве H вершин как набор чисел $\{\pi_H(\alpha)\}$, где число $\pi_H(\alpha)$ равно количеству вершин, в H связанных с вершиной α. Истинность пп. 1 и 2 легко проверяется, если только вспомнить, что вместе с удалением вершины α должны быть одновременно удалены все связанные с ней ребра.

Пример 2.

Пусть W это множество ребер в графе G или множество пар вершин, связанных графом G. Определим весовую систему $\{\pi_H\}$ на произвольном подмножестве H ребер в графе G как набор чисел $\{\pi_H(\alpha)\}$, где $\alpha \in H$ и $\pi_H(\alpha)$ – количество треугольников в множестве ребер H, содержащих ребро α. Число $\pi_H(\alpha)$ равно числу тех вершин, на которых находится множество H, такое, что если x вершина указывающая на ребро и ребро $\alpha = [b, e]$, то отсюда следует что $[b, x] \in H$ и $[e, x] \in H$.

В примерах мы использовали тот факт, что граф является топологическим объектом с одной стороны и бинарным отношением с другой стороны. Теперь рассмотрим следующую функцию множества

$$f(H) = \min_{\alpha \in H} \pi_H(\alpha), \qquad (1)$$

где $H \subseteq W$. Ниже мы предлагаем принцип, справедливый для подмножества H, на котором достигается глобальный максимум функции типа (1). Сформулируем этот принцип в терминах некоторых последовательностей элементов множества W и последовательностей подмножеств того же множества W.

Пусть $\overline{\alpha} = \{\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_{k-1}\}$ – последовательность элементов множества W и $k = |W|$. При помощи последовательности $\overline{\alpha}$ задана последовательность множеств $\overline{H}(\overline{\alpha}) = \{H_0, H_1, ..., H_{k-1}\}$, где $H_0 = W$ и $H_{i+1} = H_i \setminus \{\alpha_i\}$.

Определение 1. Назовем последовательность $\overline{\alpha}$ элементов из множества W определяющей, если в последовательности множеств $\overline{H}(\overline{\alpha})$ существует подпоследовательность $\overline{\Gamma} = \{\Gamma_0, \Gamma_1, ..., \Gamma_p\}$ такая, что:

1°. Вес $\pi_{H_i}(\alpha_i)$ произвольного элемента, принадлежащего Γ_j, но не принадлежащего Γ_{j+1}, строго меньше $f(G_{j+1})$;

2° В Γ_p не существует такого строгого подмножества L, что $f(G_p) < F(L)$.

Определение 2. Назовем подмножество H множества W определимым, если существует определяющая последовательность $\overline{\alpha}$ такая, что $H = \Gamma_p$.

Ниже мы вновь воспользуемся набором $\{\pi_H\}$ в виде системы весов по отношению к множеству H.

Теорема. На определимом множестве H функция $f(H)$ достигает своего глобального максимума. Определимое множество единственно. Все множества, в которых достигнут глобальный максимум, лежат в определяемом множестве.

Доказательство. Пусть H определимое множество. Предположим, что существует такое $L \subseteq W$, что $f(H) \le f(L)$. Предположим, что $L \setminus H \ne \varnothing$; в противном случае нам остается только доказать единственность H, что мы и сделаем ниже. Пусть H_t есть наименьшее из множеств H_i $(i = 0,1,...,k-1)$, включающих в себя множество $L \setminus H$. Из этого факта можно заключить, что существует такой элемент $\ell \in L$, что $\ell \in H_t$, но $\ell \notin H_{t+1}$. Более того, в сочетании с последним $L \setminus H \ne \varnothing$ напрашивается вывод $t < p$. Неравенство $t < p$ располагает к существованию хотя бы одного такого подмножества в последовательности множеств $\overline{\Gamma}$, что

$$\pi_{H_t}(\ell) < f(\Gamma_j) \qquad (2)$$

и $j \ge t+1$. Так как $\ell \notin H_{t+1}$ и $\Gamma_j \subseteq H_{t+1}$ верны, то следует, что $\ell \notin \Gamma_j$. Таким образом, неравенство

$$f(\Gamma_j) \le f(\Gamma_p) \qquad (3)$$

справедливо как следствие п. 2° определяющей последовательности.

Теперь пусть $\ell \in L$ и веса $\pi_L(\ell)$ минимальны в системе весов по отношению к множеству L. Неравенства (2) и (3) позволяют сделать вывод, что $\pi_{H_t}(\ell) < \pi_L(\ell)$. Выше мы выбрали H_t при условии, что $L \subset H_t$. При этом, вспоминая основное свойство п.2 системы весов (удаление элементов), нетрудно установить, что $\pi_L(\ell) \le \pi_{H_t}(\ell)$, т. е. в системе весов по отношению к множеству существует вес, строго меньший, чем минимальный. Мы пришли к противоречию и тем самым доказали, что достигнут глобальный максимум. Далее, все такие множества H, отличные от L, где также достигается глобальный максимум, действительно могут находиться внутри H. Остается доказать лишь единственность определимого множества H. В связи с доказанным выше можно предположить, что некое определимое множество H' находится внутри H, однако, продолжая линию рассуждений, аналогичную предложенной нами выше для L, заключаем, что $H \subset H'$. ∎

Следствие. Пусть $\{R\}$ – система множеств, в которой функция типа (1) достигает своего глобального максимума. Тогда, если $H_1 \in \{R\}$ и $H_2 \in \{R\}$, то $H_1 \cup H_2 \in \{R\}$.

Доказательство. Следуя пункту **2°** (основное свойство) $f(H_1) \le f(H_1 \cup H_2)$, а кроме того из $f(H_1 \cup H_2) \le f(H_1)$, следовательно $H_1 \cup H_2 \in \{R\}$. ∎

Ниже мы приводим конкретный алгоритм построения определяющих последовательностей элементов множества W. Для доступности алгоритм представлен в виде блок-схемы, похожей в какой-то степени на компьютерную программу.

3. Алгоритм

a1. Пусть множество $R = W$ и последовательности $\overline{\alpha}$ и $\overline{\beta}$ вначале пусты, а индекс $i = 0$. Здесь $\overline{\alpha} = \{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_i, ...\}$, $\overline{\beta} = \{\beta_1, \beta_2, ..., \beta_i, ...\}$.

a2. Найдите элемент μ с наименьшим весом по отношению к множеству R, запоминаем значение $\lambda = \pi_R(\mu)$ и полагаем после этого $\overline{\alpha} = \overline{\alpha}, \overline{\beta}, \mu$, а затем $\overline{\beta} = \varnothing$.

a3. Исключаем элемент μ из множества R и учитываем влияние удаленного элемента на оставшиеся элементы $\mu \in R$, т.е. вычисляем все велечины $\pi_{R\backslash\mu}(\beta)$ для всех $\beta \in R \setminus \{\mu\}$.

a4. В случае, если среди остальных (оставшихся) элементов найдутся такие γ, что

$$\pi_{R\backslash\mu}(\gamma) \leq \lambda \qquad (4)$$

то образуем последовательность указанных элементов $\overline{\gamma} = \{\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_s\}$ и положим $\overline{\beta} = \overline{\beta}, \overline{\gamma}$.

a5. Положим множество $R = R \setminus \{\mu\}$ и элемент $\mu = \beta_{i+1}$ и . возвращаемся к пункту a3 в случае, если элемент β_{i+1} определен для последовательности элементов $\overline{\beta}$, увеличивая в этот момент индекс i на единицу.

a6. В случае, когда последовательность $\overline{\alpha}$ изчерпаала все множество W, построение закончено. В противном случае вернитесь к пункту a.2, полагая сначала индекс $i = 0$.

Докажем, что только что построенная по предложенному алгоритму последовательность $\overline{\alpha}$ является определяющей. Рассмотрим последовательность $\overline{H}(\overline{\alpha})$ и выделим в качестве последовательности $\overline{\Gamma}$ те множества, которые начинаются с элемента, найденного в момент перехода алгоритма через шаг a2. Факт пересечения a2 алгоритма гарантирует, что условие (4) не выполнялось до того, как произошло пересечение, и элемент β_{i+1} не находится в последовательности на данном этапе β. Сказанное выше гарантирует также выполнение условия 1° для определяющих последовательностей. Предположим, что условие 2° в определении 1 не выполнено, т.е. в последнем множестве Γ_p последовательности $\overline{\Gamma}$ существует такое подмножество L, что $f(\Gamma_p) < f(L)$. Рассмотрим последовательность $\overline{\beta}$, которая генерируется при последнем переходе через a2 вышеописанного алгоритма, и пусть λ_p символизирует наибольшее значение среди всех таких λ. Приходится заключить что из предположения о существовании множества L, и замечая что $\lambda_p = f(\Gamma_p)$ приходим к неравенству $\lambda_p < f(L)$. По построению последовательность $\overline{\alpha}$ и вместе с последовательностью $\overline{\beta}$ (обе они), которая генерируется при последнем переходе через а2 алгоритма, использовали все элементы W. Следовательно, мы можем рассматривать множество элементов K в последовательности $\overline{\beta}$, которые начинаются с первого противостоящего элемента $\ell \in L$, где $L \subset K$. На основании обоснованного выше имеем $\pi_K(\ell) = \lambda_p$, и, вспоминая основное свойство учетной системы п.2 (удаление элементов), заключаем, кроме того, что $\pi_L(\ell) \le \lambda_p$. Мы пришли к противоречию и тем самым доказали свойство 2° определения 1 для последовательности $\overline{\alpha}$. В связи с этим возможно построение определяющих последовательностей по указанному выше алгоритму.

Подчеркнем необходимость конкретизации понятия системы весов применительно к подмножеству заданного конечного множества для решения некоторых задач распознавания образов, что должно стать предметом дальнейшего исследования.

В заключение отметим, что построение определяющих последовательностей реализовано на практике на ЭВМ для одной задачи теории графов, связанной с выделением «почти полносвязных» подграфов в заданном графе. Количество ребер в таких графах составляет около 10^4.

Литература

1. Черенин В. П. (Новосибирск, Москва, 1962) Решение некоторых комбинаторных задач оптимального планироваания методом последовательнях расчетов. а) Материалы к конференции по опыту и переспективам применения математическмх методов и ЭВМ в планировании; б) Научно-методические материакы эконом.-матем. семинара, вып 2, ЛЭММ, и ВЦ АН СССР,

2. Черенин В. П. и В. Р. Хачатуров. (Ташкент, Москва, 1965) Решение методом последовательнях расчетов одного класса задач о размещении производства; а) Сб. Применение матем. методов и ЭВМ в эконом. исследованиях. Изд. Наука, Узб. ССР; б) Сб. «Эконом.-матем. методы», вып. 2, изд. «Наука».

3. Миркин Б. Г. (Новосибирск, 1970) Задача классификации по качественным данным. Сб. «Матем вопросы формировния эконом. Моделей».